이차방정식

1 다항식의 곱셈과 인수분해

2 이차방정식

이차방정식을 풀 수 있는 일반적인 방법이 있다면

우리 주변의 자연 현상이나 사회 현상을 연구할 때 구조와 특성을 방정식으로 나타내면 그 현상을 쉽게 이해하고 예측할 수 있다고 합니다. 특히, 낙하하는 물체가 땅에 떨어지는 시간 등을 계산하기 위해서는 이차방정식을 풀어야 했으므로 옛날부터 수학자들은 이차방정식의 근을 쉽게 구하는 방법을 알아내려고 애를 썼습니다.

이와 같은 노력은 기원전 2000년경 고대 바빌로니아에서도 찾아볼 수 있는데, 당시의 바빌로니아인들은 이미 $x^2+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}$와 같은 이차방정식의 풀이 방법을 알고 있었던 것으로 보입니다.

한편, 자동차의 제동 시간이나 다이빙 선수가 수면에 도달하는 데 걸리는 시간도 이차방정식을 이용하여 계산할 수 있습니다.

(출처: Burton, D. M., 『수학의 역사–입문, 상』, 허민 역)

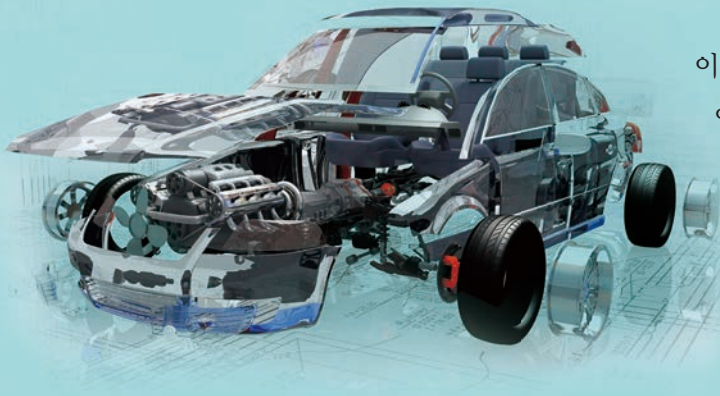
이 단원에서는

다항식의 곱셈과 인수분해의 원리를 알고, 이를 이용하여 이차방정식의 해를 구하는 방법과 그 활용에 대하여 배웁니다.

1 다항식의 곱셈과 인수분해

항공기나 고속 열차 등과 같은 운송 수단은 정밀하게 조립된 수만 개의 부품이 각자의 기능을 제대로 발휘해야 정확하게 움직일 수 있습니다.

한편, 자동차를 정비할 때 이를 분해하여 엔진, 제동 장치, 동력 전달 장치, 바퀴 등의 상태를 점검하면 그 자동차의 운행 상태뿐만 아니라 사용하는 사람의 운전 습관 등의 특성을 파악할 수 있습니다.

수학에서도 어떤 사물을 조립하거나 분해하는 것과 비슷한 상황을 생각할 수 있는데, 수나 식의 계산에서 이와 같은 것을 볼 수 있습니다. 특히, 다항식의 곱셈을 덧셈 형태로 고치거나 덧셈을 곱셈 형태로 고치는 방법은 다항식의 여러 가지 계산을 간단하게 하는 데 중요하게 쓰입니다.

이 단원에서는 다항식의 곱셈과 인수분해 방법에 대하여 알아봅니다.

• 소인수분해

1 다음 자연수를 소인수분해하시오.

(1) 18　　　(2) 60

(3) 105　　　(4) 256

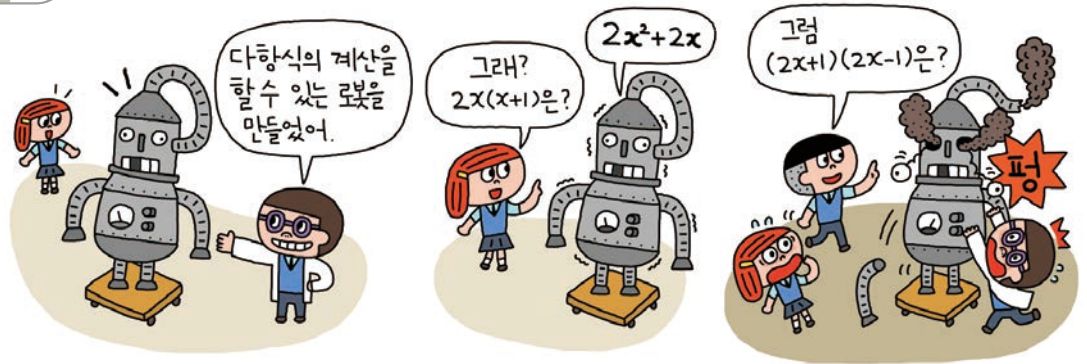
• 분배법칙

2 다음 식을 전개하시오.

(1) $a(a+3)$　　　(2) $-5x(x-4)$

(3) $3a(a-2b)$　　　(4) $(4x+y)(-2y)$

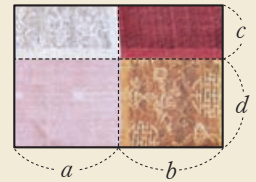
다항식의 곱셈과 곱셈 공식

학습 목표 • 다항식의 곱셈을 할 수 있다.

다항식과 다항식의 곱셈은 어떻게 하는가?

생각 열기

오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 천 조각 4개를 겹치지 않게 이어 붙여 조각보를 만들었다.

1. 조각보의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)의 꼴로 나타내 보자.

2. 조각보의 넓이를 천 조각 4개의 넓이의 합으로 나타내 보자.

위의 생각 열기에서 조각보의 넓이는 $(a+b)(c+d)$이고, 이것은 천 조각 4개의 넓이의 합인 $ac+ad+bc+bd$와 같으므로

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

임을 알 수 있다.

이것은 $(a+b)(c+d)$에서 $c+d$를 하나의 문자 M으로 놓고 다음과 같이 분배법칙을 이용하여 전개한 것과 같다.

$$\begin{aligned} &(a+b)(c+d) && \text{(}c+d\text{)를 } M\text{으로 놓는다.} \\ &=(a+b)M && \text{전개한다.} \\ &=aM+bM && M\text{을 다시 (}c+d\text{)로 바꾼다.} \\ &=a(c+d)+b(c+d) && \text{전개한다.} \\ &=ac+ad+bc+bd \end{aligned}$$

배웠어요!

$x(x+3)=x^2+3x$ (전개 → 전개식)

두 다항식의 곱은 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

문제 1 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+4)(b+3)$
(2) $(x-2)(y+1)$
(3) $(2a+1)(b-7)$
(4) $(3x-1)(5y-2)$

배웠어요!
문자와 차수가 각각 같은 항을 동류항이라고 한다.

다항식과 다항식의 곱을 전개한 전개식에 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 계산한다.

예제 1 다음 식을 전개하시오.

(1) $(3a+1)(a+2)$
(2) $(x+5y)(2x-y)$

풀이 (1) $(3a+1)(a+2)=3a\times a+3a\times 2+1\times a+1\times 2$
$=3a^2+6a+a+2$
$=3a^2+7a+2$

(2) $(x+5y)(2x-y)=x\times 2x+x\times(-y)+5y\times 2x+5y\times(-y)$
$=2x^2-xy+10xy-5y^2$
$=2x^2+9xy-5y^2$

답 (1) $3a^2+7a+2$ (2) $2x^2+9xy-5y^2$

문제 2 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+4)(a+6)$
(2) $(5x-2)(x+2)$
(3) $(3a+b)(a-5b)$
(4) $(4x-3y)(x-2y)$

$(a+b)^2$과 $(a-b)^2$을 전개하면 어떻게 되는가?

분배법칙을 이용하여 $(a+b)^2$과 $(a-b)^2$을 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

이상에서 다음과 같은 곱셈 공식을 얻는다.

곱셈 공식 (1)

❶ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

❷ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

생각 톡톡

$(-a+b)^2$과 $(a-b)^2$은 같을까?

예제 2 다음 식을 전개하시오.

(1) $(2a+3)^2$　　(2) $(4x-5y)^2$

풀이 (1) $(2a+3)^2=(2a)^2+2\times 2a\times 3+3^2$
$=4a^2+12a+9$

(2) $(4x-5y)^2=(4x)^2-2\times 4x\times 5y+(5y)^2$
$=16x^2-40xy+25y^2$

답 (1) $4a^2+12a+9$　(2) $16x^2-40xy+25y^2$

문제 3 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+5)^2$　　(2) $(7x-2)^2$

(3) $(3a+4b)^2$　　(4) $(-x+6y)^2$

문제 4 곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 105^2　　(2) $(\sqrt{2}-1)^2$

$(a+b)(a-b)$를 전개하면 어떻게 되는가?

분배법칙을 이용하여 $(a+b)(a-b)$를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=a^2-ab+ba-b^2\\&=a^2-b^2\end{aligned}$$

이상에서 다음과 같은 곱셈 공식을 얻는다.

곱셈 공식 (2)

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

예제 3 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+5)(a-5)$　　(2) $(7x+2y)(7x-2y)$

풀이 (1) $(a+5)(a-5)=a^2-5^2$
$=a^2-25$

(2) $(7x+2y)(7x-2y)=(7x)^2-(2y)^2$
$=49x^2-4y^2$

답 (1) a^2-25　(2) $49x^2-4y^2$

문제 5 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+4)(a-4)$　　(2) $(3x-1)(3x+1)$

(3) $(2a+b)(2a-b)$　　(4) $(4x-3y)(4x+3y)$

문제 6 곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 302×298　　(2) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

분모에 근호를 포함한 무리수가 있을 때, 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모를 유리화할 수 있다.

예제 4 곱셈 공식을 이용하여 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

풀이 (1) 분모와 분자에 각각 $\sqrt{3}-1$을 곱하면

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(2) 분모와 분자에 각각 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$를 곱하면

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}$$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ (2) $5+2\sqrt{6}$

문제 7 다음 수의 분모를 유리화하시오.

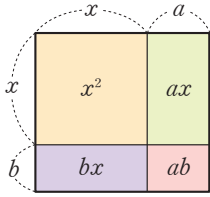
(1) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$ (2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$ (4) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

탐구 문제 8 $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$, $y=\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$일 때, x^2+y^2의 값을 구하려고 한다.

(1) x와 y의 분모를 각각 유리화하시오.

(2) x^2+y^2의 값을 구하시오.

$(x+a)(x+b)$를 전개하면 어떻게 되는가?

분배법칙을 이용하여 $(x+a)(x+b)$를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)&=x^2+bx+ax+ab\\&=x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

이상에서 다음과 같은 곱셈 공식을 얻는다.

곱셈 공식 (3)

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

예제 5 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+5)(x+2)$ (2) $(x-3)(x+8)$

풀이 (1) $(x+5)(x+2)=x^2+(5+2)x+5\times2$
$=x^2+7x+10$

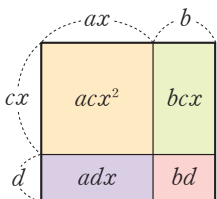
(2) $(x-3)(x+8)=x^2+(-3+8)x+(-3)\times8$
$=x^2+5x-24$

답 (1) $x^2+7x+10$ (2) $x^2+5x-24$

문제 9 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x+1)$ (2) $(x+3)(x-9)$

(3) $(x-5)(x+6)$ (4) $(x-4)(x-7)$

$(ax+b)(cx+d)$를 전개하면 어떻게 되는가?

분배법칙을 이용하여 $(ax+b)(cx+d)$를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d)&=acx^2+adx+bcx+bd\\&=acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}$$

이상에서 다음과 같은 곱셈 공식을 얻는다.

곱셈 공식 (4)

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

예제 6 다음 식을 전개하시오.

(1) $(3x+1)(2x+7)$ (2) $(2x-5)(x+3)$

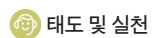
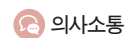
풀이 (1) $(3x+1)(2x+7)=(3\times2)x^2+(3\times7+1\times2)x+1\times7$
$=6x^2+23x+7$

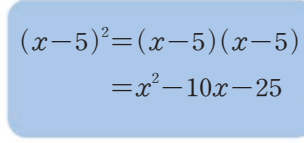
(2) $(2x-5)(x+3)=(2\times1)x^2+\{2\times3+(-5)\times1\}x+(-5)\times3$
$=2x^2+x-15$

답 (1) $6x^2+23x+7$ (2) $2x^2+x-15$

문제 10 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+1)(3x+2)$ (2) $(5x+1)(2x-3)$

(3) $(4x-5)(x+3)$ (4) $(3x-4)(5x-2)$

다음은 건호와 유나가 $(x-5)^2$을 전개하는 과정을 나타낸 것이다.

건호: $(x-5)^2=x^2-5^2$
$=x^2-25$

유나: $(x-5)^2=(x-5)(x-5)$
$=x^2-10x-25$

▶ 두 학생의 풀이에서 잘못된 부분을 모두 찾아 그렇게 생각하는 이유를 말하고, 바르게 고쳐 보자.

눈으로 확인하는 곱셈 공식

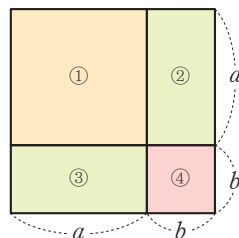
앞에서는 분배법칙을 이용하여 다항식의 곱셈 공식이 성립함을 확인했다. 그런데 고대 그리스의 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 그가 쓴 책 『원론』에서 분배법칙 대신에 도형의 성질을 이용하여 여러 가지 다항식의 곱셈 공식이 성립함을 확인했다고 한다.

(출처: 모리스 클라인, 『수학사상사 I』, 심재관 역)

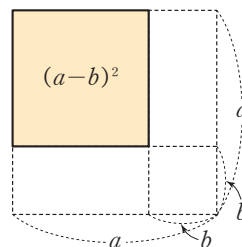
유클리드의 『원론』에 나오는 방법으로 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이 성립함을 확인해 보자.

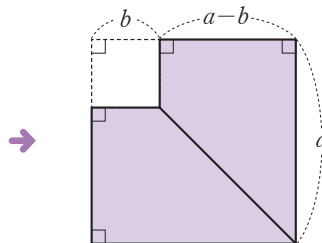
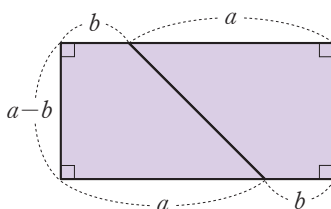
오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 모양의 색종이를 정사각형 모양 2개와 직사각형 모양 2개로 자르면, 도형 ②와 ③의 넓이가 모두 ab로 같으므로

$$(a+b)^2=①+②+③+④=a^2+2ab+b^2$$

이 성립함을 눈으로 확인할 수 있다.

오른쪽 그림을 이용하여 곱셈 공식

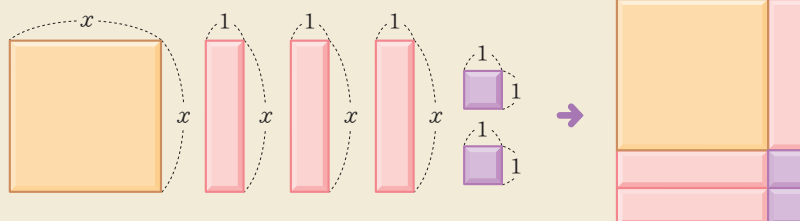
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

이 성립함을 설명해 보자.

탐구 2 다음 그림을 이용하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$이 성립함을 설명해 보자.

◀ 유클리드

인수분해

학습 목표 • 인수분해의 뜻을 이해하고, 다항식을 인수분해할 수 있다.

인수분해란 무엇인가?

다음은 정사각형 3개와 직사각형 3개를 겹치지 않게 이어 붙여 새로운 직사각형을 만든 것이다.

1. 정사각형 3개와 직사각형 3개의 넓이의 합을 식으로 나타내 보자.

2. 새로 만든 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)의 꼴로 나타내 보자.

$14=2\times7$과 같이 합성수는 두 개 이상의 소수의 곱으로 소인수분해할 수 있다. 이제 다항식도 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 수 있는지 알아보자.

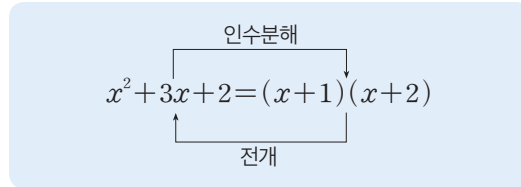
위의 생각 열기에서 정사각형 3개와 직사각형 3개의 넓이의 합은 x^2+3x+2이고, 새로 만든 직사각형의 넓이는 $(x+1)(x+2)$이므로

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

임을 알 수 있다.

즉, 다항식 x^2+3x+2는 두 다항식 $x+1$과 $x+2$의 곱으로 나타낼 수 있다.

이와 같이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 다항식의 **인수**라고 한다. 예를 들어 $x+1$과 $x+2$는 다항식 x^2+3x+2의 인수이다.

또 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 **인수분해**한다고 한다.

문제 1 다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 말하시오.

(1) $a(a+b)$ (2) $(x-5)(x+1)$

다항식 $ma+mb$에서 두 항 ma와 mb에 공통으로 들어 있는 인수는 m이다. 이때 분배법칙을 이용하여 인수 m을 묶어 내면 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ma+mb=m(a+b)$$

예제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2+5a (2) $3x^2-6xy$

▸각 항에 공통으로 들어 있는 인수를 간단히 공통인수라고 한다.

풀이 (1) 두 항 a^2과 $5a$의 공통인수는 a이므로

$$a^2+5a=a\times a+5\times a$$
$$=a(a+5)$$

(2) 두 항 $3x^2$과 $-6xy$의 공통인수는 $3x$이므로

$$3x^2-6xy=3x\times x+3x\times(-2y)$$
$$=3x(x-2y)$$

답 (1) $a(a+5)$ (2) $3x(x-2y)$

참고 인수분해할 때는 공통인수가 남지 않도록 모두 묶어 낸다.

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2a^2+a$ (2) x^2-7x

(3) ab^2+4ab (4) $6x^2y-2xy^2$

$a^2+2ab+b^2$과 $a^2-2ab+b^2$은 어떻게 인수분해하는가?

다음과 같이 두 식이 있다.

$(a+3)^2$ $(b-5)^2$

1. 곱셈 공식을 이용하여 $(a+3)^2$과 $(b-5)^2$을 각각 전개해 보자.

- $(a+3)^2=$ ☐
- $(b-5)^2=$ ☐

2. 1에서 전개한 등식의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 써 보자.

곱셈 공식

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (1)

❶ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

❷ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

예제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^2+8a+16$ (2) $9x^2-6xy+y^2$

풀이 (1) $a^2+8a+16=a^2+2\times a\times 4+4^2=(a+4)^2$

(2) $9x^2-6xy+y^2=(3x)^2-2\times 3x\times y+y^2=(3x-y)^2$

답 (1) $(a+4)^2$ (2) $(3x-y)^2$

문제 3 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2-2a+1

(2) $x^2+x+\frac{1}{4}$

(3) $25a^2-10ab+b^2$

(4) $x^2+6xy+9y^2$

$(a+3)^2$, $(b-5)^2$이나 $\frac{1}{2}(3x+y)^2$과 같이 다항식의 제곱으로 된 식 또는 이 식에 수를 곱한 식을 **완전제곱식**이라고 한다.

예제 3 다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $a^2+18a+\square$

(2) $x^2+\square xy+49y^2$

풀이 (1) $a^2+18a+\square=a^2+2\times a\times 9+\square$이므로

$\square=9^2=81$

(2) $x^2+\square xy+49y^2=x^2+\square xy+(\pm 7y)^2$이므로

$\square=2\times(\pm 7)=\pm 14$

답 (1) 81 (2) ± 14

문제 4 다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $a^2-12a+\square$

(2) $x^2-14x+\square$

(3) $a^2+\square ab+25b^2$

(4) $4x^2+\square xy+9y^2$

a^2-b^2은 어떻게 인수분해하는가?

곱셈 공식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (2)

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

예제 4 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2-9　　(2) $4x^2-25y^2$

풀이 (1) $a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$

(2) $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x+5y)(2x-5y)$

답 (1) $(a+3)(a-3)$　(2) $(2x+5y)(2x-5y)$

문제 5 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2-49　　(2) x^2-64

(3) a^2-36b^2　　(4) $9x^2-16y^2$

문제 6 인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 102^2-98^2　　(2) $0.85^2-0.15^2$

$x^2+(a+b)x+ab$는 어떻게 인수분해하는가?

다음에 답해 보자.

1. 곱이 4인 두 정수를 모두 찾고, 그 합을 구하여 오른쪽 표를 완성해 보자.

2. 곱이 4이면서 합이 -5인 두 정수를 말해 보자.

곱이 4인 두 정수	두 정수의 합

곱셈 공식

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (3)

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

인수분해 공식을 이용하여 다항식 x^2+4x+3을 인수분해해 보자.

이 다항식은 인수분해 공식 (3)에서

$$a+b=4,\ ab=3$$

인 경우이므로, 합이 4이고 곱이 3인 두 정수 a와 b를 찾으면 된다.

$x^2+(a+b)x+ab$

$x^2+\ \ 4x\ \ +3$

오른쪽 표와 같이 곱이 3인 두 정수는

$$1\text{과 } 3,\ -1\text{과 } -3$$

이고, 이 중에서 합이 4인 두 정수는 1과 3이다.

곱이 3인 두 정수	두 정수의 합
1, 3	4
−1, −3	−4

따라서 x^2+4x+3은 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

예제 5 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2+5x+6　　(2) $x^2+7x-18$

풀이 (1) 곱이 6인 두 정수는 오른쪽 표와 같이 4가지이다. 이 중에서 합이 5인 것은 2와 3이므로 주어진 식을 인수분해하면

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

곱이 6인 두 정수	두 정수의 합
1, 6	7
−1, −6	−7
2, 3	5
−2, −3	−5

(2) 곱이 -18인 두 정수는 오른쪽 표와 같이 6가지이다. 이 중에서 합이 7인 것은 -2와 9이므로 주어진 식을 인수분해하면

$$x^2+7x-18=(x-2)(x+9)$$

곱이 −18인 두 정수	두 정수의 합
1, −18	−17
−1, 18	17
2, −9	−7
−2, 9	7
3, −6	−3
−3, 6	3

답 (1) $(x+2)(x+3)$　(2) $(x-2)(x+9)$

문제 7 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+8x+15$　　(2) $x^2-12x+20$

(3) $x^2+3x-28$　　(4) $x^2-5x-14$

$acx^2+(ad+bc)x+bd$는 어떻게 인수분해하는가?

곱셈 공식

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 (4)

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

다음을 통해 인수분해 공식 (4)를 이용하여 다항식 $3x^2+7x+2$를 인수분해하는 방법을 알아보자.

$3x^2+7x+2=(ax+b)(cx+d)$일 때,

$ac=3$, $ad+bc=7$, $bd=2$

인 네 정수 a, b, c, d를 찾으려고 한다.

$acx^2+(ad+bc)x+bd$

$3x^2\ +\ 7x\ +\ 2$

▸ 보통 a와 c는 양의 정수로 생각한다.

1 $ac=3$인 두 양의 정수 a, c와 $bd=2$인 두 정수 b, d를 찾아 오른쪽 그림과 같이 나타낼 때, 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

❶
❷
❸
❹
2 **1**의 4가지 경우 중에서 $ad+bc=7$을 만족시키는 a, b, c, d의 값을 각각 말해 보자.

앞의 함께하기의 4가지 경우 중에서 주어진 조건을 만족시키는 네 정수는 $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=1$임을 알 수 있다.

따라서 $3x^2+7x+2$는 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$3x^2+7x+2=(x+2)(3x+1)$$

예제 6 $6x^2-7x-5$를 인수분해하시오.

풀이 인수분해 공식 (4)에서

$$ac=6,\ ad+bc=-7,\ bd=-5$$

인 네 정수 a, b, c, d의 값을 구하면

$$a=2,\ b=1,\ c=3,\ d=-5$$

따라서 주어진 식을 인수분해하면

$$6x^2-7x-5=(2x+1)(3x-5)$$

$6x^2-7x-5$

2	╳	1 →	3
3		-5 →	-10
			-7

답 $(2x+1)(3x-5)$

문제 8 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2x^2+9x+9$

(2) $5x^2-7x+2$

(3) $3x^2+x-10$

(4) $6x^2-11x-7$

생각이 크는 수학

다항식의 전개와 인수분해의 관계와 같이 수학에서는 과정을 서로 바꾸어 계산하는 관계가 있다.

전개 →

$$(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$$

← 인수분해

▶ 수학에서 위와 같은 관계에 있는 또 다른 예를 찾아보자.

문제 해결 태도 및 실천

근호를 포함한 식의 계산

식의 값을 구할 때는 직접 대입하여 구할 수도 있지만, 근호를 포함한 식에서는 앞에서 배운 인수분해 공식과 완전제곱식을 이용하여 구할 수도 있다.

$x=1+\sqrt{2}$일 때, x^2-2x-3의 값을 다음과 같이 여러 가지 방법으로 구해 보자.

방법 1 직접 대입하기

$x=1+\sqrt{2}$를 x^2-2x-3에 직접 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= (1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})-3 \\ &= (1+2\sqrt{2}+2)-(2+2\sqrt{2})-3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

방법 2 인수분해 공식을 이용하기

주어진 식을 인수분해하면 $\quad x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$x=1+\sqrt{2}$를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} (x+1)(x-3) &= (1+\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}-3) \\ &= (\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2) \\ &= (\sqrt{2})^2-2^2=-2 \end{aligned}$$

따라서 $\quad x^2-2x-3=-2$

방법 3 완전제곱식을 이용하기

x^2-2x-3을 완전제곱식을 이용하여 변형하면

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= (x^2-2x+1)-4 \\ &= (x-1)^2-4 \end{aligned}$$

$x=1+\sqrt{2}$에서 $x-1=\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= (\sqrt{2})^2-4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

탐구 1 $x=\sqrt{5}-2$일 때, x^2+4x+1의 값을 여러 가지 방법으로 구하고, 다른 사람의 방법과 비교해 보자.

탐구 2 $x=\sqrt{5}+2$, $y=\sqrt{5}-2$일 때, x^2-y^2의 값을 여러 가지 방법으로 구하고, 다른 사람의 방법과 비교해 보자.

스스로 확인하는 문제

1 다항식의 곱셈과 곱셈 공식

(1) 두 다항식의 곱은 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

(2) **곱셈 공식**

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

2 인수분해

(1) **인수분해**

① **인수**: 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 다항식의 인수라고 한다.

② **인수분해**: 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 인수분해한다고 한다.

인수분해

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

전개

③ 다항식에 공통인수가 있을 때는 분배법칙을 이용하여 공통인수를 묶어 내어 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ma+mb=m(a+b)$$

(2) **완전제곱식**: 다항식의 제곱으로 된 식 또는 이 식에 수를 곱한 식

(3) **인수분해 공식**

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

④ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

기본 문제

01 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3)(b-7)$ (2) $(2a+b)^2$

(3) $(1-3a)^2$ (4) $(a+4b)(a-4b)$

(5) $(x+6)(x-8)$ (6) $(2x-3)(x+5)$

02 다음 두 다항식에 공통으로 들어 있는 인수를 구하시오.

$$a^2+5ab, \qquad ab+5b^2$$

03 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $ab+ac-3a$ (2) $9a^2+6a+1$

(3) $\frac{1}{4}x^2-x+1$ (4) $16x^2-1$

(5) $x^2-7x+12$ (6) $3x^2-x-4$

04 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $a^2+4a+\square$ (2) $a^2-16a+\square$

(3) $x^2+\square x+1$ (4) $4x^2+\square x+49$

표준 문제

05 다음 식을 계산하시오.

(1) $(x+2)^2-(x-2)^2$

(2) $(x+1)(x-1)+(2x-3)^2$

(3) $(3x-1)(3x+1)-(x-4)(x-1)$

(4) $(2x+9)(4x-1)-(2x-1)(2x+6)$

06 $x=\dfrac{1}{\sqrt{10}+3}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}$일 때, $x+y$의 값을 구하시오.

07 $x^2+(2p+1)x+25$가 완전제곱식이 될 때, 수 p의 값을 모두 구하시오.

08 다음 솔이와 정우의 대화를 읽고, 솔이네 집 현관문의 비밀번호를 구하시오.

솔이: 우리 집 현관문의 비밀번호는 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$ 네 개의 숫자로 이루어져 있어. 알아맞혀 봐.
정우: 힌트 좀 줘.
솔이: $(Ax-B)(x+2)$를 전개하면 $3x^2+2x-8$이고, $x^2+Cx-16$을 인수분해하면 $(x+D)(x-2)$야.

09 다음은 정연이와 철희가 각각 다항식을 인수분해한 것이다. 잘못된 부분을 모두 찾아 풀이 과정을 바르게 고치시오.

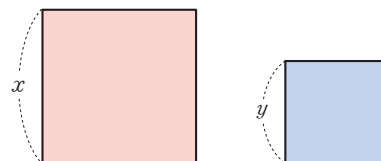
정연	철희
〈x^2+4x-5의 인수분해〉 곱해서 4이고 더해서 -5가 되는 두 수는 -1과 -4이므로 $x^2+4x-5=(x-1)(x-4)$	〈$2x^2+3x-5$의 인수분해〉 $1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 5$ $2 \longrightarrow -1 \longrightarrow -2$ 3 이므로 $2x^2+3x-5=(x+5)(2x-1)$

10 $-2<x<\frac{1}{3}$일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

$$\sqrt{4+4x+x^2}-\sqrt{9x^2-6x+1}$$

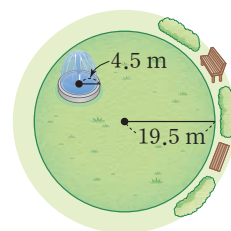
발전 문제

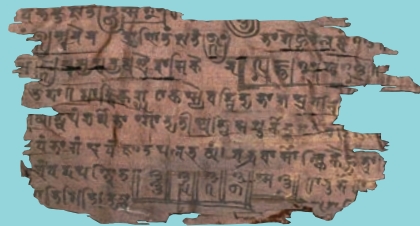
11 문제 해결

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 x와 y인 두 정사각형이 있다. 두 정사각형의 둘레의 길이의 합은 40이고, 넓이의 합은 52이다.

(1) 두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 40임을 등식으로 나타내시오.

(2) 두 정사각형의 넓이의 합이 52임을 등식으로 나타내시오.

(3) 두 정사각형의 둘레의 길이의 곱을 구하시오.

12 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 19.5 m인 원 모양의 잔디 광장에 반지름의 길이가 4.5 m인 원 모양의 분수대가 있다. 인수분해를 이용하여 분수대를 제외한 잔디 광장의 넓이를 구하시오.

2 이차방정식

1881년 인도 북부의 박샬리 지역(지금은 파키스탄 영토)에서 발견된 ‘박샬리 문서(Bakhshali Manuscript)’는 3~4세기경에 기록된 것으로 추정되며, 0을 포함한 인도-아라비아 숫자의 옛 형태와 여러 가지 수학적 사실이 자작나무 껍질에 기록되어 있습니다.

▲ 박샬리 문서

흥미로운 점은 이 문서에 인도 문명권에서 가장 오래된 이차방정식의 풀이 방법이 기록되어 있다는 것입니다. 여기에 나오는 이차방정식은 a와 c가 양수일 때 $ax^2+(2b-a)x-2c=0$과 같은 꼴인데, 이것의 근을

$$x=\frac{-(2b-a)\pm\sqrt{(2b-a)^2+8ac}}{2a}$$

와 같이 나타내고 있습니다.

이차방정식의 풀이 방법은 기원전 2000년경 고대 바빌로니아 시대부터 연구하였으며 주로 양수인 근을 구했는데, ‘박샬리 문서’에서는 오늘날처럼 이차방정식의 근이 두 개가 있음을 알았고 음수인 근까지 구했던 것으로 추측하고 있습니다.

(출처: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk, 2018)

이 단원에서는 이차방정식을 푸는 여러 가지 방법을 알아보고, 이를 활용하여 문제를 푸는 방법을 배웁니다.

준비 학습

• 일차방정식의 풀이

1 다음 일차방정식을 푸시오.

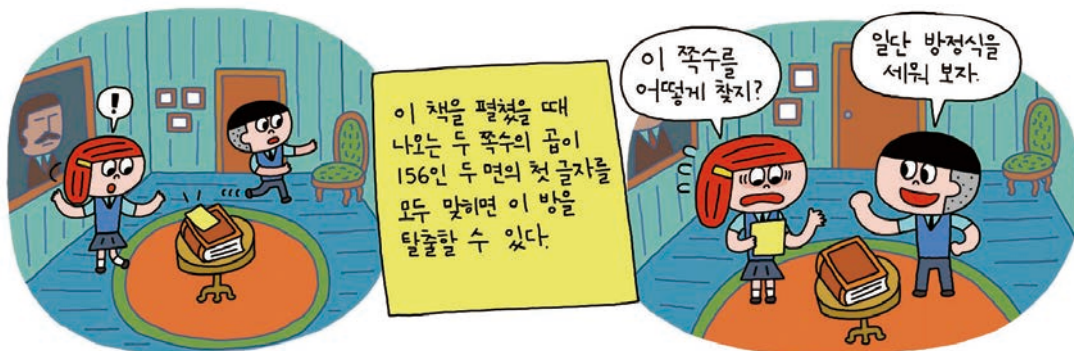
(1) $3x-1=x+5$ (2) $x+3=2(x-1)$

• 제곱근

2 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 3 (2) 4 (3) 9 (4) 12

이차방정식과 그 해

학습 목표 • 이차방정식과 그 해의 뜻을 이해한다.

이차방정식과 그 해는 무엇인가?

탁구 경기에 출전한 x개의 팀이 다른 팀과 모두 한 번씩 만 겨루는 리그전의 전체 경기의 수는 $\frac{x(x-1)}{2}$이다.

▸ 리그전이란 경기에 참가한 모든 팀이 서로 한 번 이상 겨루는 경기 방식을 말한다.

x개의 팀이 출전한 탁구 리그전의 전체 경기의 수가 6일 때, 이 관계를 등식으로 나타내 보자.

위의 생각 열기에서 전체 경기의 수가 6임을 등식으로 나타내면

$$\frac{x(x-1)}{2}=6$$

이고, 이 등식을 정리하면 다음과 같다.

$$x^2-x-12=0$$

이와 같이 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리할 때,

$$(x\text{에 대한 이차식})=0$$

의 꼴이 되는 방정식을 x에 대한 **이차방정식**이라고 한다.

일반적으로 x에 대한 이차방정식은

$$ax^2+bx+c=0 \ (\text{단, } a, b, c\text{는 수, } a\neq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

보기 ① $x^2-1=0$과 $2x^2-3x=5$는 모두 이차방정식이다.

② $x(x+2)=x^2+1$은 정리하면 $2x-1=0$이므로 이차방정식이 아니다.

문제 1 다음 중에서 이차방정식을 모두 찾으시오.

(1) $x^2-3=2x$

(2) $2x^2+1=x+2x^2$

(3) $(x+2)(x-5)=0$

(4) $x(x+5)=(x-3)(x-1)$

다음을 통하여 이차방정식이 참이 되는 경우를 알아보자.

x의 값이 -1, 0, 1, 2일 때, 이차방정식 $x^2-x-2=0$이 참이 되게 하는 x의 값을 알아보려고 한다.

1 다음 표를 완성해 보자.

x의 값	좌변의 값	우변의 값	방정식의 참/거짓
-1	$(-1)^2-(-1)-2=0$	0	참
0		0	
1		0	
2		0	

2 **1**에서 이차방정식이 참이 되게 하는 x의 값을 모두 말해 보자.

위의 함께하기에서 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때 이차방정식 $x^2-x-2=0$은 참이 됨을 알 수 있다.

이와 같이 이차방정식이 참이 되게 하는 x의 값을 그 이차방정식의 해 또는 근이라 하고, 이차방정식의 해를 모두 구하는 것을 '이차방정식을 푼다'고 한다.

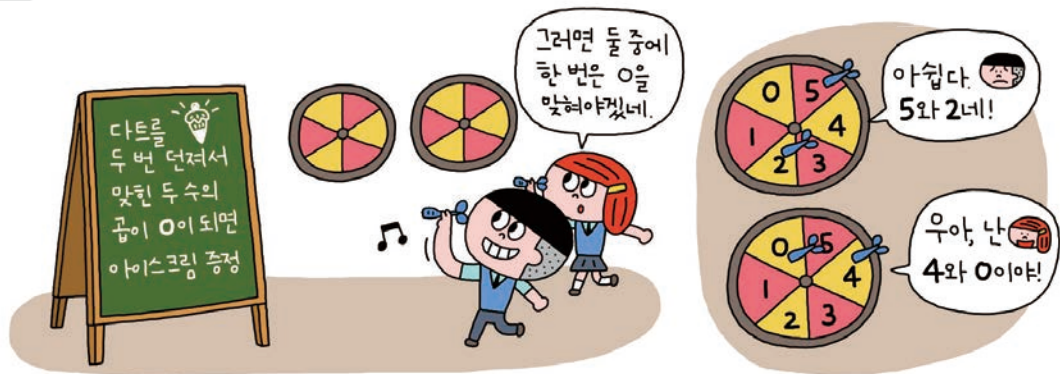
예를 들어 위의 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.

문제 2 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-1=0$

(2) $x^2+3x+2=0$

인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

학습 목표 • 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

인수분해를 이용하여 이차방정식을 어떻게 푸는가?

두 수 A와 B에 대하여 다음과 같이 4가지 경우가 있다.

① $A=0,\ B=0$　　② $A=0,\ B\neq0$

③ $A\neq0,\ B=0$　　④ $A\neq0,\ B\neq0$

▶ $AB=0$이 되는 경우는 어느 것인지 말해 보자.

두 수 또는 두 식 A와 B에 대하여 $AB=0$이면 다음 3가지 경우 중에서 반드시 하나가 성립한다.

① $A=0,\ B=0$　　② $A=0,\ B\neq0$　　③ $A\neq0,\ B=0$

이 3가지 경우를 통틀어 '$A=0$ 또는 $B=0$'이라고 한다. 따라서 두 수 또는 두 식 A와 B에 대하여 다음이 성립한다.

$AB=0$이면　$A=0$ 또는 $B=0$

이 성질을 이용하면 (일차식)$\times$(일차식)$=0$ 꼴의 이차방정식을 풀 수 있다.

보기　이차방정식 $(x-1)(x+3)=0$에서 $x-1=0$ 또는 $x+3=0$이다.
따라서 이 이차방정식의 해는 $x=1$ 또는 $x=-3$이다.

문제 1 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x(x+6)=0$

(2) $(2x+1)(5x-3)=0$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변을 두 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있을 때는 앞의 성질을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

예제 1 이차방정식 $6x^2+x-2=0$을 푸시오.

풀이 좌변을 인수분해하면 $(3x+2)(2x-1)=0$

$3x+2=0$ 또는 $2x-1=0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

확인 $x=-\frac{2}{3}$와 $x=\frac{1}{2}$을 각각 $6x^2+x-2=0$에 대입하면 모두 (좌변)=(우변)이므로 $x=-\frac{2}{3}$와 $x=\frac{1}{2}$은 이 이차방정식의 해이다.

답 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

문제 2 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-4=0$

(2) $x^2-8x+15=0$

(3) $3x^2-x-2=0$

(4) $6x^2+7x-5=0$

예제 2 이차방정식 $(x+2)(x-4)=7$을 푸시오.

풀이 괄호를 풀어 좌변을 전개하면 $x^2-2x-8=7$

우변의 7을 좌변으로 이항하여 정리하면 $x^2-2x-15=0$

좌변을 인수분해하면 $(x+3)(x-5)=0$

$x+3=0$ 또는 $x-5=0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-3$ 또는 $x=5$

확인 $x=-3$과 $x=5$를 각각 $(x+2)(x-4)=7$에 대입하면 모두 (좌변)=(우변)이므로 $x=-3$과 $x=5$는 이 이차방정식의 해이다.

답 $x=-3$ 또는 $x=5$

문제 3 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+12=7x$ (2) $(5x+2)(x+3)=6$

(3) $(x+2)(x-2)=3x$ (4) $2x(x+1)=3x+10$

중근이란 무엇인가?

이차방정식 $x^2-2x+1=0$을 풀기 위해 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)^2=0,\ \text{즉}\quad (x-1)(x-1)=0$$

이므로 주어진 이차방정식의 해는

$$x=1\ \text{또는}\ x=1$$

로 서로 같다. 이와 같이 두 해가 중복될 때, 이 해를 주어진 이차방정식의 **중근**이라고 한다.

이를테면 $x=1$은 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 중근이다.

생각 톡톡: 이차방정식 $x^2=0$의 해는?

참고 이차방정식이 (완전제곱식)=0의 꼴로 나타나면 중근을 갖는다.

예제 3 이차방정식 $9x^2+6x+1=0$을 푸시오.

풀이 좌변을 인수분해하면 $(3x+1)^2=0$

$3x+1=0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-\frac{1}{3}$

확인 $x=-\frac{1}{3}$을 $9x^2+6x+1=0$에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 $x=-\frac{1}{3}$은 이차방정식의 해이다.

답 $x=-\frac{1}{3}$

문제 4 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-4x+4=0$ (2) $x^2+6x+9=0$

(3) $4x^2+20x+25=0$ (4) $x^2-6x=2(x-8)$

근의 공식

학습 목표 • 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

제곱근을 이용하여 이차방정식을 어떻게 푸는가?

제곱하여 5가 되는 수를 생각해 보자.

1. 제곱하여 5가 되는 수를 x라고 할 때, 이를 x에 대한 이차방정식으로 나타내 보자.
2. 1의 이차방정식을 풀어 보자.

위의 생각 열기의 이차방정식 $x^2=5$에서 x는 5의 제곱근이므로 이 이차방정식의 해는 다음과 같다.

$$x=\sqrt{5} \text{ 또는 } x=-\sqrt{5}$$

▸ '$x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$'를 한꺼번에 '$x=\pm\sqrt{5}$'로 나타내기도 한다.

일반적으로 $ax^2+c=0$ (단, $ac<0$)의 꼴의 이차방정식은 $x^2=k$ (단, $k>0$)의 꼴로 고친 후, k의 제곱근을 구하여 풀 수 있다.

예제 1 이차방정식 $4x^2-12=0$을 푸시오.

풀이 좌변의 -12를 우변으로 이항하면 $4x^2=12$

양변을 4로 나누면 $x^2=3$

x는 3의 제곱근이므로 $x=\pm\sqrt{3}$

답 $x=\pm\sqrt{3}$

문제 1 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-20=0$ (2) $5x^2-2=7$

예제 2 이차방정식 $(x+3)^2-2=0$을 푸시오.

풀이 좌변의 -2를 우변으로 이항하면 $(x+3)^2=2$

$x+3$은 2의 제곱근이므로 $x+3=\pm\sqrt{2}$

좌변의 3을 우변으로 이항하면 $x=-3\pm\sqrt{2}$

답 $x=-3\pm\sqrt{2}$

문제 2 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $(x+1)^2-16=0$ (2) $2(x-2)^2-12=0$

완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 어떻게 푸는가?

완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $x^2+6x-2=0$을 풀어 보자.

좌변의 -2를 우변으로 이항하면

$$x^2+6x=2$$

이고, 좌변을 완전제곱식으로 만들기 위하여 x의 계수 6의 $\frac{1}{2}$인 3을 제곱한 값 9를 양변에 더하면

$$x^2+6x+9=2+9$$

이다. 좌변을 완전제곱식으로 고치고 우변을 정리하면

$$(x+3)^2=11$$

이므로 $x+3=\pm\sqrt{11}$이다. 따라서 이 이차방정식의 해는 다음과 같다.

$$x=-3\pm\sqrt{11}$$

이와 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변을 인수분해하기 어려울 때는

$$(x+p)^2=q \ (\text{단, } q>0)$$

와 같이 좌변을 완전제곱식으로 만든 후, 제곱근을 이용하여 풀 수 있다.

예제 3 이차방정식 $4x^2-16x+9=0$을 푸시오.

풀이 양변을 x^2의 계수 4로 나누면 $x^2-4x+\frac{9}{4}=0$

좌변의 $\frac{9}{4}$를 우변으로 이항하면 $x^2-4x=-\frac{9}{4}$

양변에 4를 더하면 $x^2-4x+4=-\frac{9}{4}+4$

좌변을 완전제곱식으로 고치면 $(x-2)^2=\frac{7}{4}$

$x-2$는 $\frac{7}{4}$의 제곱근이므로 $x-2=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

좌변의 -2를 우변으로 이항하면 $x=2\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$, 즉 $x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{2}$

답 $x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{2}$

문제 3 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+2x-5=0$ (2) $3x^2-4x-2=0$

이차방정식의 근의 공식이란 무엇인가?

다음을 통하여 이차방정식의 해를 구하는 일반적인 방법을 알아보자.

완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 구하려고 한다.

▶ 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

❶ 양변을 x^2의 계수로 나눈다. $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

❷ 상수항을 우변으로 이항한다. $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

❸ 양변에 $\left(\frac{x\text{의 계수}}{2}\right)^2$을 더한다. $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\square\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\square\right)^2$

❹ 좌변을 완전제곱식으로 고친다. $\left(x+\square\right)^2=\frac{b^2-\square}{4a^2}$

❺ 제곱근을 구한다. $x+\square=\pm\frac{\sqrt{b^2-\square}}{2a}$ (단, $b^2-\square\geq0$)

❻ 해를 구한다. $x=\frac{\square\pm\sqrt{b^2-\square}}{2a}$

앞의 함께하기로부터 다음과 같은 이차방정식의 **근의 공식**을 얻는다.

이차방정식의 근의 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(\text{단, } b^2-4ac\geq0)$$

예제 4 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $3x^2+4x-1=0$을 푸시오.

풀이 근의 공식에 $a=3$, $b=4$, $c=-1$을 대입하면

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}=\frac{-4\pm\sqrt{28}}{6}$$

$$=\frac{-4\pm2\sqrt{7}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$$

답 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$

문제 4 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+5x+2=0$　　(2) $2x^2+4x-1=0$

(3) $3x^2-10x+3=0$　　(4) $2x^2-6x=5$

탐구 문제 5 다음은 세 학생이 이차방정식 $4x^2+3x-10=0$을 푸는 방법을 말한 것이다.

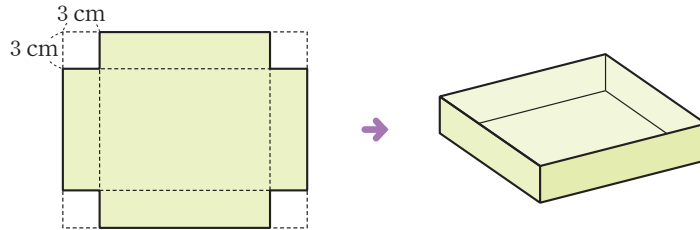
(1) 위의 이차방정식을 세 학생이 말한 방법으로 각각 푸시오.

(2) 세 학생이 말한 방법 중에서 어느 것이 더 편리한지 말하시오.

이차방정식을 활용하여 문제를 어떻게 해결하는가?

우리 주변에 있는 여러 가지 수량에 관련된 문제 중에는 이차방정식을 활용하여 해결할 수 있는 경우가 있다.

다음을 통해 이차방정식을 이용하여 문제를 해결하는 방법을 알아보자.

그림과 같이 가로의 길이가 세로의 길이보다 4 cm 더 긴 직사각형 모양의 종이에서, 네 귀퉁이를 한 변의 길이가 3 cm인 정사각형 모양으로 잘라 내어 뚜껑이 없는 상자를 만들었더니 상자의 부피가 288 cm^3이었다. 이때 처음 종이의 세로의 길이를 구하려고 한다.

1 구하려고 하는 것을 말해 보자.

2 **1**에서 말한 것을 미지수 x로 놓고, 문제의 뜻에 맞는 방정식을 세워 보자.

3 **2**에서 세운 방정식을 풀고, 답을 구해 보자.

4 **3**에서 구한 답이 문제의 뜻에 맞는지 확인해 보자.

위의 함께하기에서 알 수 있듯이 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 때는 다음과 같은 단계로 풀면 편리하다.

이차방정식을 활용하여 문제를 해결하는 단계

❶ 미지수 정하기	문제의 뜻을 이해하고, 구하려는 것을 미지수 x로 놓는다.
❷ 이차방정식 세우기	문제의 뜻에 맞게 이차방정식을 세운다.
❸ 이차방정식 풀기	이차방정식을 푼다.
❹ 확인하기	구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

예제 5 네 살 차이가 나는 두 자매의 나이의 곱이 96일 때, 동생의 나이를 구하시오.

풀이 ❶ 동생의 나이를 x살이라고 하자.

❷ 언니의 나이는 $(x+4)$살이고, 두 자매의 나이의 곱이 96이므로

$$x(x+4)=96$$

❸ 이 방정식을 정리하면 $x^2+4x-96=0$

좌변을 인수분해하면 $(x+12)(x-8)=0$이므로

$x=-12$ 또는 $x=8$

그런데 나이는 양수이므로 $x=8$

따라서 동생의 나이는 8살이다.

❹ 동생의 나이가 8살이면 언니의 나이는 $8+4=12$(살)이다. 이때 두 사람의 나이의 곱은 $8\times12=96$이므로, 구한 해가 문제의 뜻에 맞는다.

답 8살

문제 6 오른쪽 그림은 어느 해 4월의 달력이다. 위아래로 이웃하는 두 날짜를 곱한 값이 228일 때, 두 날짜를 구하시오.

조선 시대의 수학자이자 실학자인 홍정하(洪正夏, 1684~?)가 쓴 수학책 『구일집(九一集)』에 다음과 같은 문제가 실려 있다.

> 크고 작은 두 개의 정사각형이 있다. 넓이의 합은 468이고, 큰 정사각형의 한 변은 작은 쪽의 한 변보다 6만큼 길다. 두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 얼마인가?

(출처: 김용운, 이소라, 『청소년을 위한 한국 수학사』)

▶ 위의 문제를 이차방정식을 세워서 풀어 보자.

예술

황금비와 황금 사각형

고대 이집트나 그리스의 건축물과 예술품에서 특별한 비례 관계를 찾아볼 수 있는데, 이것을 고대 그리스의 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 『원론』의 제6권에서 다음과 같이 기술하고 있다.

> 한 선분에서 전체의 길이에 대한 큰 부분의 길이의 비와 큰 부분의 길이에 대한 작은 부분의 길이의 비가 같도록 그 선분을 분할할 수 있다.

그리스 밀로스(Milos)섬에서 발견된 조각상인 「밀로의 비너스」는 ▶
배꼽을 기준으로 상반신과 하반신의 길이가 황금비에 가깝다고 한다.

위의 비례 관계를 식으로 나타내 보자.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB 위의 한 점 C에 대하여

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{BC}, \text{ 즉 } \quad (x+1) : x = x : 1$$

이 성립하도록 분할할 수 있다. 이때 x의 값을 레오나르도 다빈치(Leonardo da Vinci, 1452~1519)가 '황금비(Golden Ratio)'라고 처음 불렀다고 한다.

(출처: Gamwell, L., 『Mathematics & Arts: A Cultural History』 /
Olsen, S., 『The Golden Section: Nature's Greatest Secret』)

위의 비례식 $(x+1) : x = x : 1$로부터 x에 대한 이차방정식

$$x^2 - x - 1 = 0$$

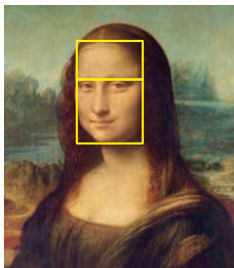
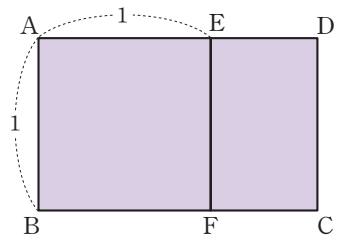
을 세울 수 있는데, 이를 풀면 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$이다. 그런데 $x > 0$이므로 다음을 얻는다.

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\cdots$$

탐구 오른쪽 그림에서 전체 직사각형 ABCD와 작은 직사각형 DEFC는 서로 닮은 도형이다. 이와 같은 직사각형 ABCD를 '황금 사각형(Golden Rectangle)'이라고 한다.

(1) $\overline{AB} = \overline{AE} = 1$일 때, $\overline{DE}$의 길이를 구해 보자.

(2) $\overline{AD}$의 길이를 구해 보자.

(3) 황금 사각형에서 황금비가 어떻게 나타나는지 말해 보자.

◀ 레오나르도 다빈치가 그린 「모나리자」의 얼굴에서 황금 사각형의 비례를 찾아볼 수 있다.

스스로 확인하는 문제

1 이차방정식과 그 해

(1) **이차방정식:** 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리할 때,

(x에 대한 이차식)$=0$

의 꼴이 되는 방정식을 x에 대한 이차방정식이라고 한다.

➡ x에 대한 이차방정식은

$ax^2+bx+c=0$ (단, a, b, c는 수, $a\neq 0$)

의 꼴로 나타낼 수 있다.

(2) **중근:** 이차방정식의 두 해가 중복될 때, 이 해를 그 이차방정식의 중근이라고 한다.

2 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

(1) **인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변을 두 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있을 때는

$AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$

임을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

3 근의 공식

(1) **제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이**

$ax^2+c=0$ (단, $ac<0$)의 꼴의 이차방정식은 $x^2=k$ (단, $k>0$)의 꼴로 고친 후, k의 제곱근을 구하여 풀 수 있다.

➡ $x^2=k$이면 $x=\pm\sqrt{k}$

(2) **완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변을 인수분해하기 어려울 때는

$(x+p)^2=q$ (단, $q>0$)

와 같이 좌변을 완전제곱식으로 만든 후, 제곱근을 이용하여 풀 수 있다.

(3) **이차방정식의 근의 공식**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ (단, } b^2-4ac\geq 0\text{)}$$

기본 문제

01 다음 보기 중에서 이차방정식인 것을 모두 고르시오.

보기

ㄱ. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$　　ㄴ. $x(x+3)=6+x^2$

ㄷ. x^2-3x-4　　ㄹ. $(5+x)(5-x)=x^2$

02 인수분해를 이용하여 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+5x=0$　　(2) $x^2+6x+5=0$

(3) $9x^2-6x+1=0$　　(4) $2x^2+x-6=0$

03 제곱근을 이용하여 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $4x^2-49=0$　　(2) $(x+1)^2=5$

(3) $(x-3)^2=20$　　(4) $(3x-2)^2-12=0$

04 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+3x+1=0$

(2) $x^2+5x-2=0$

(3) $2x^2-4x-3=0$

(4) $3x^2-10x+5=0$

표준 문제

05 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 한 근이 -2일 때, 수 a의 값과 다른 한 근을 각각 구하시오.

06 이차방정식 $4x^2+px+25=0$이 중근을 가질 때, 양수 p의 값과 이 이차방정식의 해를 각각 구하시오.

07 이차방정식 $x^2+6x-3=0$을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 수이다.)

08 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $(x-3)(x+1)=5$

(2) $(2x+1)(2x-1)=4x-2$

(3) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-1=0$

(4) $0.4x^2=0.5x-0.1$

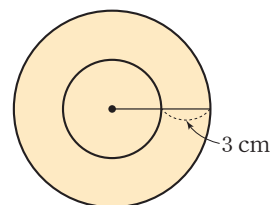
09 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해가 $x=-5$ 또는 $x=2$일 때, 두 수 a와 b의 값을 각각 구하시오.

10 이차방정식 $5x^2+4x-p=0$의 해가 $x=\frac{q\pm\sqrt{10}}{5}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이다.)

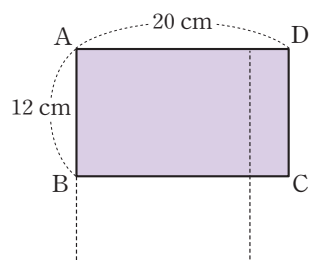
11 오른쪽 그림과 같이 어떤 원의 반지름의 길이를 3 cm만큼 줄였더니, 그 넓이가 처음 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$이 되었다. 처음 원의 반지름의 길이를 구하시오.

발전 문제

12 추론

이차방정식 $x^2+4x+a+3=0$의 해가 모두 유리수가 되도록 자연수 a의 값을 정하려고 한다.

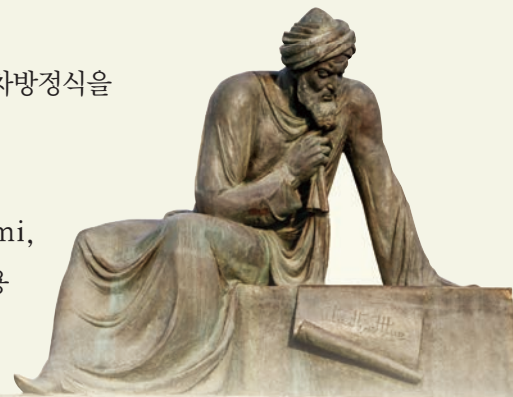
(1) 주어진 이차방정식의 해를 구하고, 해가 모두 유리수가 될 조건을 말하시오.

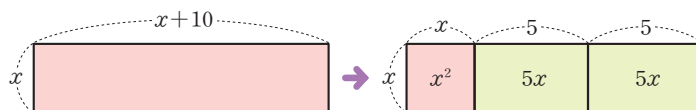
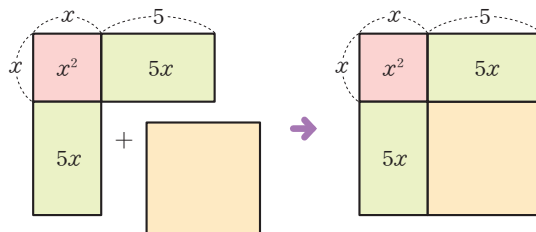
(2) 주어진 이차방정식의 해가 모두 유리수가 되도록 자연수 a의 값을 정하고, 그때 이 이차방정식의 해를 구하시오.

13 오른쪽 그림과 같이 가로와 세로의 길이가 각각 20 cm와 12 cm인 직사각형 ABCD가 있다. 가로의 길이는 매초 1 cm씩 줄어들고 세로의 길이는 매초 2 cm씩 늘어날 때, 몇 초 후에 처음 직사각형과 넓이가 같아지는지 구하시오.

도형을 이용하여 이차방정식 풀기

▲ 알콰리즈미

앞에서 이차방정식을 푸는 여러 가지 방법을 배웠다. 이제 이차방정식을 기하학적인 방법으로 풀어 보자.

아라비아의 대표적인 수학자 알콰리즈미(Al-Khwarizmi, 780?~850?)는 $x^2+10x=39$와 같은 이차방정식을 도형을 이용하여 풀 수 있었다고 한다. 그런데 도형을 이용하여 이차방정식을 풀었기 때문에 알콰리즈미는 양수인 해만을 구하였다.

1 다음은 도형을 이용하여 $x^2+10x=39$의 양수인 해를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수 또는 식을 써넣어 보자.

❶ $x^2+10x=x(x+$□$)$이므로 가로의 길이가 □, 세로의 길이가 x인 직사각형을 만든 후, 이 직사각형을 다시 그림과 같이 가로의 길이가 □, □, □인 3개의 직사각형으로 나눈다.

❷ 3개의 직사각형을 다음 그림과 같이 배열하고, 전체가 정사각형이 되도록 넓이가 □인 정사각형을 추가한다.

❸ ❷에서 새로 만든 정사각형의 넓이는 $39+$□$=$□이므로 이 정사각형의 한 변의 길이 $x+5$는 □이다. 따라서 $x=$□이다.

위의 활동으로부터 알콰리즈미의 방법은 $x^2+10x=39$의 좌변을 오른쪽과 같이 완전제곱식으로 고쳐서 해를 구하는 방법과 같음을 알 수 있다.

$x^2+10x+25=39+25$
$(x+5)^2=8^2$
$x>0$일 때, $x+5=8$

2 알콰리즈미의 방법으로 이차방정식 $x^2+16x-57=0$의 양수인 해를 구해 보자.

단원을 마무리하는 문제

01 $(2x-a)(3x+5)$를 전개한 식이 $6x^2+bx-10$일 때, $a-b$의 값은? (단, a와 b는 수이다.)

① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

02 $(x+7)(x-1)-3(x+2)(x-2)$를 계산하면?

① $-2x^2+6x-11$ ② $-2x^2+6x+5$
③ $-2x^2+18x-7$ ④ $2x^2-6x-5$
⑤ $2x^2-18x+7$

03 $(5x+y)^2-(2x+y)(2x-y)$를 계산할 때, x^2의 계수를 a, y^2의 계수를 b라고 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

04 다음 식에서 □ 안에 알맞은 수는?

$$(x^2+1)(x+1)(x-1)=x^{\square}-1$$

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

05 다음 중에서 다항식 $2x^2+x-3$의 인수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $2x-3$
④ $2x+3$ ⑤ $3x+2$

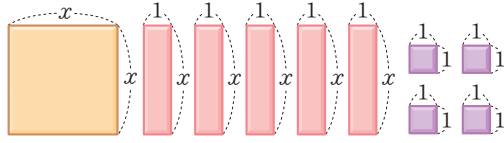
06 다음 두 다항식을 각각 인수분해할 때, 공통으로 들어 있는 인수는?

$$9x^2-1,\qquad 3x(x+2)-(x+2)$$

① $x-2$ ② $x-3$ ③ $x+2$
④ $3x-1$ ⑤ $3x+1$

07 a와 b가 정수일 때, 다음 등식을 만족시키는 수 p의 최솟값을 구하시오.

$$x^2+px-6=(x+a)(x+b)$$

08 다음 그림과 같이 넓이가 각각 x^2, x, 1인 직사각형 10개를 겹치지 않게 이어 붙여 하나의 새로운 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이는?

① $x+1$　② $x+4$　③ $2x+5$
④ $4x+10$　⑤ x^2+5x+4

09 다음 보기 중에서 이차방정식을 모두 고른 것은?

보기
ㄱ. $(x+5)(2x-1)$　ㄴ. $(2x+1)^2=0$
ㄷ. $x(3+x)=5+x^2$　ㄹ. $x^2-6=5x$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄹ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄹ

10 이차방정식 $x^2-4x-5=0$을 풀면?

① $x=1$ 또는 $x=5$
② $x=-5$ 또는 $x=1$
③ $x=-1$ 또는 $x=5$
④ $x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=1$
⑤ $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{5}$

11 다음 이차방정식 중에서 중근을 갖는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x^2=1$　② $(x-3)^2=0$
③ $x^2+2x+1=0$　④ $(x+1)^2=9$
⑤ $x^2+4x=4$

12 이차방정식 $x^2-6x+2k=1$이 중근을 가질 때, 수 k의 값을 구하시오.

13 이차방정식 $x^2+x-1=0$을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타낼 때, 두 수 p와 q의 값은?

① $p=-\frac{1}{2}$, $q=1$　② $p=-\frac{1}{2}$, $q=\frac{5}{4}$
③ $p=\frac{1}{2}$, $q=1$　④ $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{5}{4}$
⑤ $p=1$, $q=2$

14 이차방정식 $2x^2-9x+a=0$의 한 근이 2일 때, 나머지 한 근은? (단, a는 수이다.)

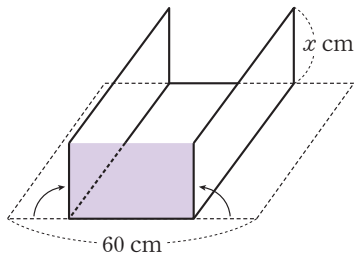
① -9　② $-\frac{5}{2}$　③ -2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 9

15 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 해가 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$일 때, $a+b$의 값은?

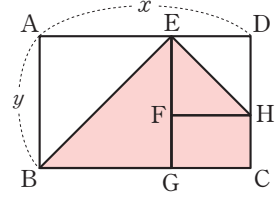
(단, a와 b는 수이다.)

① -10 ② -7 ③ -4
④ 7 ⑤ 10

16 이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 해가 $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$일 때, 수 k의 값을 구하시오.

17 폭이 60 cm인 철판의 양쪽을 같은 길이만큼 직각으로 접어 올려 물받이를 만드는데, 직사각형 모양의 색칠한 부분의 넓이가 400 cm^2이었다. 접어 올린 부분의 한쪽 길이를 x cm라 할 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 색칠한 부분의 가로의 길이는 $(60-x)$ cm이다.
② 색칠한 부분의 세로의 길이는 $\frac{x}{2}$ cm이다.
③ 색칠한 부분의 둘레의 길이는 $(120-2x)$ cm이다.
④ 색칠한 부분의 넓이를 식으로 나타내면 $(60x-x^2)$ cm^2이다.
⑤ $x=10$ 또는 $x=20$이다.

[18~21] 서술형 풀이 과정과 답을 써 보자.

18 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 $\overline{AD}=x$, $\overline{AB}=y$이고 $x>y$이다. □ABGE와 □EFHD가 모두 정사각형일 때, 사각형 EBCH의 넓이를 x와 y에 대한 식으로 나타내시오.

19 $-3<x<4$일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

$$\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{x^2-8x+16}$$

20 이차방정식 $x^2-3x+a-1=0$의 해가 모두 유리수가 되도록 하는 자연수 a의 값을 모두 구하시오.

21 자연수에서 연속하는 두 짝수의 곱이 224일 때, 두 수를 구하시오.

자기 평가 정답을 맞힌 문항에 ○표를 하고 결과를 점검한 다음, 이 단원의 학습 목표를 얼마나 성취했는지 스스로 평가하고, 학습 보충 계획을 세워 보자.

문항 번호	학습 목표	성취도		
01 02 03 04 18	다항식의 곱셈을 할 수 있는가?	☺	😐	☹
05 06 07 08 19	다항식의 인수분해를 할 수 있는가?	☺	😐	☹
09	이차방정식과 그 해의 의미를 이해하였는가?	☺	😐	☹
10 11 12 13 14 15 16 17 20 21	이차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?	☺	😐	☹

0개~12개 개념 학습이 필요해요! | 13개~15개 부족한 부분을 검토해 봅시다! | 16개~18개 실수를 줄여 봅시다! | 19개~21개 훌륭합니다!

● 학습 보충 계획:

이차방정식의 해를 찾는 데카르트의 방법

17세기 프랑스의 수학자이자 철학자인 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)는 유명한 철학책인 『방법서설』의 부록으로 『기하학(La géométrie)』을 썼는데, 여기에서 그는 대수학과 기하학을 통합하는 방법을 고안하였다.

▲ 데카르트

예를 들어 데카르트는

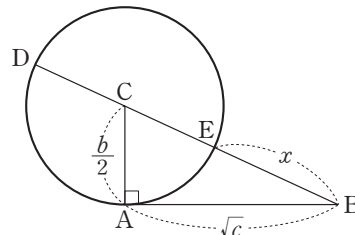
$$x^2+bx=c \ (\text{단, } b>0,\ c>0)$$

꼴의 이차방정식의 양수인 해를 도형을 이용하여 찾는 방법을 다음과 같이 설명했다.

❶ $\overline{AB}=\sqrt{c}$인 선분 AB를 그린다.

❷ 점 A를 지나고 $\overline{AB}$와 수직인 직선 위에 $\overline{AC}=\frac{b}{2}$인 점 C를 찾는다.

❸ 점 C를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{AC}$인 원을 그린다.

❹ 선분 BC와 원의 교점을 E라 할 때, $\overline{BE}$가 주어진 이차방정식의 양수인 해이다.

위의 그림에서 △ABC는 ∠A=90°인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\text{에서 } \left(\frac{b}{2}+x\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

이때 양변의 양의 제곱근을 비교하면 다음을 얻는다.

$$\frac{b}{2}+x=\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}=\frac{\sqrt{b^2+4c}}{2}\text{에서 } \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2}$$

한편, 원래 주어진 이차방정식을 $x^2+bx-c=0$으로 고쳐서 근의 공식에 대입하면 다음과 같다.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$$

그러므로 데카르트의 방법은 주어진 이차방정식의 양수인 해를 도형을 이용하여 구한 것이다.

(출처: Allaire, P. R., Bradley, R. E., 「Geometric Approaches to Quadratic Equations from Other Times and Places」)

수많은 정보를 안전하게 보호하는 방법은 무엇일까요?

정보 보안 전문가는 해커의 침입과 각종 바이러스 발생에 대비해 전문적으로 전산망의 보안을 유지하고, 서버의 하드웨어와 소프트웨어 기술을 바탕으로 앞으로 일어날 수 있는 보안 문제를 해결하고 예방하는 일을 수행합니다. 즉, 사이버 테러의 위협으로부터 정보를 보호하는 일을 하는 사람이므로 정보 보안 전문가가 되기 위해서는 컴퓨터 운영 체제와 시스템 관리뿐만 아니라 네트워크 프로그래밍 등에 대한 지식이 필요하며 윤리성도 갖춰야 합니다.

사이버 테러는 컴퓨터 통신망을 타고 정부 기관이나 민간 기관의 정보 시스템에 침입해 중대한 장애를 발생시키거나 파괴하는 등의 범죄 행위입니다. 특정 서버에 고의로 엄청난 양의 트래픽을 일으켜 서버를 마비시키는 디도스(DDoS) 공격이 대표적인 예인데, 모든 것을 디지털화하여 정보 시스템에 저장하는 정보화 시대에서 사이버 테러는 가장 무거운 범죄 중의 하나입니다.

컴퓨터에 저장된 수많은 정보는 네트워크를 통해 서로 공유됩니다. 개인은 물론 기업과 국가 기관 등에서 사용하는 컴퓨터에는 많은 정보가 저장되어 있습니다. 그런데 기업의 기밀문서가 해커에 의해 유출되거나, 은행 네트워크가 해킹을 당해서 고객의 통장 잔고가 뒤바뀐다면 심각한 문제가 발생할 수 있습니다. 그러므로 권한이 없는 사람이 컴퓨터 내부 네트워크로 침투하는 것을 막아 데이터베이스에 저장된 소중한 정보를 보호해야 합니다.

한편, 암호화 기술을 개발하고 인증 방식을 만드는 데 수학 이론을 이용하기도 합니다. 현재 가장 널리 쓰이는 암호 체계 중의 하나인 공개 키 암호 기법(RSA)에서는 아주 큰 수를 소인수분해하는 것이 매우 어렵다는 점을 기본 원리로 사용합니다. 그래서 큰 수를 소인수분해할 때 이차식과 같은 다항식의 인수분해와 관련된 이론을 응용하기도 합니다.

(출처: 워크넷, 2018 / 교육부, 한국직업능력개발원, 『2015 미래의 직업 세계(해외 직업편)』)